

## Kivonás az első osztályban

A kivonás alapművelet, az összeadás inverz művelete. Valamely a számból egy  $b$  számot kivonni, annak az  $x$  számnak a meghatározását jelenti, amelyre  $b+x = a$  teljesül. Azaz:  $a-b = x$ . Ebben az egyenlőségben az egyes tagok neve rendre: kisebbítendő ( $a$ ), kivonandó ( $b$ ), különbség ( $x$ ). Természetes számok összege természetes szám, vagyis a természetes számok összeadása nem vezet ki a természetes számok halmazából. Ez a kivonásra már nem teljesül. Ha a kivonandó nagyobb, mint a kisebbítendő, akkor a kivonás nem végezhető el a természetes számok körében: a különbség negatív egész szám lesz. Viszont az egész számok kivonása nem vezet ki az egész számok halmazából. Ez az első osztályos matematika tanításakor úgy veendő figyelembe, hogy a tanulók számára kitűzött feladatokban a kivonandónál nagyobb kisebbítendőt kell szerepeltetnünk. A matematika ismeretanyagának tantervi ütemezése szerint a negatív szám fogalmával való ismerkedés (az is csak az előkészítés igényével) második osztályban esedékes. Alsó tagozaton a szemléletes bevezetés és a hosszú érlelés a negatív számokkal kapcsolatos tevékenység funkciója. Nem műveletek eredményeként értelmezzük a negatív számokat. Ezért indokolatlan olyan kivonást kitűznünk a gyerekeknek, amelyben a kivonandó nagyobb a kisebbítendőnél.

Az elnevezések használatával kapcsolatban szükségesnek tartjuk megjegyezni, hogy a kivonás elvételként való értelmezésénél a maradék (maradt) kifejezés használata szemléletes lenne, de ezt a szót fenn kell tartanunk a maradékos osztás számára.

A kivonást — az összeadáshoz hasonlóan — egyénileg végzett manuális tevékenység közben ismerhetik meg legkönnyebben a gyerekek. Az egyénileg végzett manuális tevékenységen nem önálló, a tanító közvetlen irányítását nélkülöző tapasztalatszerzést értünk. Hanem ezzel a szóhasználatral arra hívjuk fel a figyelmet, hogy a kézbe vett, használt eszközök biztosította tapasztalatokat nem pótolja az osztálytársak, a tanító manipulálásának megfigyelése.

A műveletfogalom kialakításakor nem szabad elszakadni a konkrétumtól, a valóságtól. Valóságos, igazi (tárgyi szinten is megjeleníthető) problémákat vizsgálva, azokat cselekvéssel, rajzzal megoldatva célszerű eljutni a számfeladatként történő lejegyzéshez. Ahhoz, hogy a gyerekek szemléletében a valóság és az elvont műveletek szoros, kétirányú kapcsolata kialakuljon, nagyon sok műveletet kell tevékenységgel végeztetnünk.

A tapasztalatszerzés szervezésének célszerű fokozatai: manipuláció — tárgyszemléltetés — szemléltetőeszközök használata — képek értelmezése — rajzok készítése — lejegyzett számok — elvont számok — a tanultak gyakorlati alkalmazása.

A kivonást darabszámmal, mérőszámmal és számegyenesen értelmezzük.

Darabszámmal:

- elvételként,
- valamennyivel kevesebb,
- darabszámok különbségeként,
- az egésznek részeként.

Mérőszámmal:

- elvételként,

- valamennyivel rövidebb, valamennyivel könnyebb,
- mérőszámok különbségeként,
- az egésznek részeként.

Számegegyenesen:

- visszalépésként.

A kivonások darabszámok, illetve a mérőszámok különbségeként való értelmezése kivételével valamennyi értelmezés- és tevékenységtípus megfelel az összeadás egy-egy értelmezésének. A műveletek közötti inverz kapcsolat kölcsönös erősítésre biztosít lehetőséget a műveletek értelmezésekor. Ezt úgy tartjuk célszerűnek kihasználni, hogy az összeadás és a kivonás megfelelő értelmezési típusait egymással párhuzamosan tanítjuk. Kivétel az egyesítés gondolatának a megfordítása (a bontás), mint a kivonásnak az egész részeként való értelmezése. A kivonásnak ezt az értelmezését értik meg a legnehezebben a gyerekek, ezt célszerű utolsónak hagyni. Így az összeadás első, egyesítés-kor történő értelmezésének időszakában még nem foglalkozunk kivonással.

A gyerekek döntő többségének már az iskoláskor előtt van olyan tapasztalata, hogy ha valamiből elveszünk, akkor az kevesebb lesz. A kivonás legtermészetesebb, ezért legegyszerűbb értelmezése az elvétel. Az elvétel a hozzáadás megfordítása. Ezért tanítható eredményesen a hozzáadással összekapcsolva. Nyilván (hiszen két fogalomról van szó) hosszabb idő szükséges a tapasztalatok biztosítására, több időt kell rászánunk, de így védekezhetünk a gondolkodás merevségéből adódó hibalehetőségek ellen. Lényeges a cselekvéssel szervezett tapasztalatgyűjtés, mert a hozzátevés rajzon való megjelenítéséhez viszonyítva az elvétel ábrázolása, értelmezése nehezebb. Sok cselekvéssel és képolvasással célszerű értelmeztetnünk az elvette, elfogyott, eltört, elrepült, megetté, elvesztette, elhasználta stb. kifejezéseket.

Az elvétel képi ábrázolását a változás előtti és utáni helyzetet is kifejező, a változásokat félreérthetetlenül rögzítő rajzokkal célszerű bevezetnünk.

Csak későbbi időszakban esedékes az a megállapodás, hogy amit elveszünk, ami elfogyott stb., azt áthúzzuk.

A gyerekek műveletfogalmának minél sokoldalúbb tapasztalatszerzéssel történő alapozásához a kivonás darabszámmal való értelmezése mellett a mérőszámmal történő értelmezésre is szükség van. Háromfajta mennyiség mérőszámának elvétellel együttjáró csökkenését vizsgálhatjuk első osztályban. Ez a három mennyiség a hosszúság, a tömeg és az űrtartalom. Az iskolai tanulás-tanítás feltételei között ez a tevékenység a hosszúságra vonatkozóan szervezhető a legkönnyebben. Viszont az alapos fogalomkialakítás sokoldalú, lényegesen különböző tapasztalatok biztosítását teszi szükségessé, ezért a mennyiségekkel kapcsolatos tapasztalatoknak a tömegmérésre, az űrtartalom mérésre is ki kell terjedniük. Csak így kerülendő el, hogy a mérési eljárás, az elvétel értelmezése hosszúságméréshez tapadjon. A személyes, cselekvő tapasztalatszerzést soha nem pótolja tökéletesen a tanító néni vagy egy másik gyerek méréseinek megfigyelése. A tanulóknak maguknak kell mérniük. Nemcsak megmérni különböző mennyiségeket, hanem kimérni is. Például az elvétel mérőszámmal való értelmezésének néhány lehetősége:

- előbb megmért hosszúságú hurkapálcából letörve, papírcsíkból levágva, fonalból leszakítva egy-egy darabot. Majd megmérve az elvett (letört-levágott-leszakított) darabot és a megmaradt részt (a különbséget), értelmezhetjük kivonásként az eljárást;
- egyforma tárgyakat választva tömegegységül (elsős gyerekeknek jó, ha a tömegegységeknek nemcsak a tömege azonos) vagy olyan tárgyak tömegét mérjük, amelyek tömege pontosan többszöröse a tömegegységnek, vagy apró, ömlesztett dolgokét (kicsi szegek, búzadara, mák, lencse, szárazborsó, bab). Így az elvett tárgy (illetve ömlesztett dolgok) tömege mint kivonandó, a mérlegen maradó mennyiség mint különbség értelmezhető.
- valamely kisebb edény (pl. pohár) űrtartalmát választva egységül, egy edény (pl. befőttesüveg) űrtartalmát víz töltöttségével megmérjük. Ezt követően néhány egységnyi kitöltve az edényben levő vízből, az ott maradt víz mennyiségének mérőszáma különbségeként értelmezhető.

Számegyenesen a kivonást visszalépésként értelmezzük. A számegyenesen ábrázolt összeadások és kivonások is kezdetben tényleges lépegetések legyenek. A tanterem padozatára rajzolt egyenesen lépegessenek néhányan, és ezt a mozgást rögzítse a táblai rajz. Ezt kövessék a kisebb tárgyakkal a gyerekek munkasztalain lejátszott lépegetései. Csak a biztos értés szintjének elérése után tekinthetünk el a manuálisan is elvégzett lépegetéstől.

Az összeadás utolsó típusú értelmezéséhez, a valamennyivel többhöz javasoljuk kapcsolni a kivonás valamennyivel kevesebb (darabszámként), valamennyivel rövidebb, valamennyivel könnyebb típusú értelmezését. Lényegében annak megállapításáról van szó, hogy különböző elemszámú halmazok esetén az egyikben mennyivel van több, illetve kevesebb, mint a másikban, valamint különböző mennyiségek összehasonlításakor az egyik mennyiség mennyivel nagyobb, illetve kisebb, mint a másik. A fokozatosság elvét betartva, egyszerű, könnyen, jól áttekinthető esetekkel kezdve, először a különbségeket csak bemutatva, később leszámolva, illetve megmérve kérjük az összehasonlítást. Az ilyen típusú problémákat összeadásként nehezebb értelmezni, mint kivonásként. Tárgyak manuális párosításával célszerű ezt az értelmezést bevezetni, amit rajzon végzett párosítás követhet.

A párosítást követően a hiány (ill. a többlet) leszámolható. Később ezt a típusú értelmezést függvényre vezető gépjátékok, szöveges feladatok megoldásával gyakoroltathatjuk.

A különbségeket lehetőleg minél gyakrabban mindkét irányba célszerű kérdezni és megfogalmaztatni a gyerekekkel. Például, ha a fogason öt kabáttal van több, mint ahány sapka, akkor öt sapkával van kevesebb, mint ahány kabát; ha édesanya három évvel fiatalabb, mint édesapa, akkor édesapa három évvel idősebb, mint édesanya.

Az összeadásnak és a kivonásnak a valamennyivel több — kevesebb, hosszabb — rövidebb, nehezebb — könnyebb értelmezésének erősítése, gyakorlása realizálható:

- állandó különbségű számsorozatok folytatásával;
- olyan függvényre vezető szöveges feladatok megoldásával, amelyeknél az egyik adat, mennyiség valamennyivel több (kevesebb), mint a másik;
- valamennyinek a hozzáadását, kivonását előíró szabályjátékok megadásával;
- számok közötti összefüggések keresésével (szabály megfogalmazása szavakkal, matematikai szimbólumokkal) olyan esetekre vonatkozóan, amikor az adatpárok különbsége állandó;
- állandó különbségű adatpárok gyűjtésével (Péternek négy forinttal több pénze van, mint Katinak. Mennyi pénzük lehet?).

Ezekkel a műveletek értelmezésének rögzítésén, a számolási készség fejlesztésén túl nyilván más résztémák (nyitott mondatok, sorozatok, függvények) ismeretanyagát is erősítjük.

A kivonásnak darabszámok és mérőszámok különbségeként való értelmezése a valamennyivel kevesebb, valamennyivel rövidebb, könnyebb típusú értelmezéshez hasonlít. De csak hasonlít. A különbséget egy konkrét példán mutatjuk be:

Valamennyivel kevesebb:

Péternek 13 könyve van. Zolinak 5-tel kevesebb. Hány könyve van Zolinak?

$$13 - 5 = 8$$

Darabszámok különbsége:

Péternek 13 könyve van. Zolinak 8 darab. Mennyivel van több könyve Péternek, mint Zolinak?

$$13 - 8 = 5$$

A kivonás legnehezebb értelmezési típusa, az egyesítés megfordítása. A kivonásnak az egész részeként való értelmezésekor a bontásból kell kiindulni. Fokozatosan juthatunk csak el annak megértéséhez, hogy ebben az esetben egy kisebb mennyiséget fejezünk ki egy nagyobb mennyiség részeként.



kezdetben ilyeneket olvasnak le a gyerekek:

$2+5$ ;  $5+2$ ;  $2+2+3$ ;  $2+3+2$  stb.

Viszont a gyerekek „halmazának” egy-egy „részhalmazát” tekintve:

Hány leány van a képen?

A legegyszerűbb válasz, nyilván: 2.

A kép azonban azt is kifejezi, hogy 7—5 a leányok száma.

Pontosan a gyerekek és a fiúk számának a különbsége.

Hány fiú van a képen?

Nyilván a fiúk száma egyetlen számnévvel megadva: 5, különbséggént: 7—2.

Nem véletlen, hogy a kivonás különböző értelmezési lehetőségeivel kezdtük e témakörrel tantervi feladatainak ismertetését. Időrendben is, a feldolgozás funkciója szerint is elsődleges annak megértése és elsajátítása, hogy a valóság milyen kapcsolatokat (milyen változást, milyen tevékenységet) fejezzük ki a számok kivonásával. Természetesen ettől függetlenül tanév végére azt is el kell érünk, hogy a gyerekek a 20-as számkörben képesek legyenek a számok különbségének pontos és gyors kiszámítására (eszköz nélkül is). Ezt fogalmazhatjuk úgy is, hogy ebben a számkörben kapásból „rá tudják vágni” a helyes eredményt. A kivonással kapcsolatos tantervi elvárások teljesítése (hiszen így „rávágva” tudni is követelmény) a számolási készség folyamatos fejlesztése nélkül nem lehetséges. Nem létezik olyan készség, amelyet nem lehet tovább fejleszteni. A mechanikus gyakorlási, bevésési módszerek, a sulykolás alkalmazásával ennek ellenére nem értünk egyet. A számolási készség öncélú, mechanikus fejlesztése helyett a problémába, tevékenységbe ágyazott, illetve olyan számfeladatokkal kapcsolatos pozitív értelemben vett tréninggel értünk egyet, amely előkészíti a tanítási óra további részében sorra kerülő feladatok megoldását.

Az összeadás és a kivonás számolási eljárásainak tanítását egymással párhuzamosan a műveletek értelmezésének fokozataihoz igazodva, a már megismert értelmezést állandóan napirenden tartva célszerű szervezni. Fokozatosan növelve (a gyerekek készség szintjéhez igazodva) az elvárásokat. Nem a problémák lebontogatásában gondoljuk a fokozatosságot, hanem dramatizálás (eljátszás), manuális tevékenykedés, képi megjelenítés, írásbeli lejegyzés alkalmazásában, illetve első időszakban egyszerűbb, később nehezebb, összetettebb feladatokat kitűzve, de a megoldás módját az egész feladat vonatkozásában a gyerekekre bízva.

A gyerekek érdeklődését megtartani, természetes kíváncsiságukat a tanulás érdekében felhasználni csak úgy lehet, ha mindig valóságos problémákat oldatunk meg velük. Ne számolási feladatokat, hanem problémákat tűzzünk ki, amelyet kirakással, rajzzal (valamilyen a gyerekek gondolkodásának megfelelő módszerrel) megoldva, idővel számfeladatként lejegyezve is rögzíthetnek. Ha ezeknek a problémáknak a megoldása a tanulás valamely időszakában (például egy tanítási órán) mindig ugyanarra a számra vezetne, akkor ezek viszonylag hamar már nem lennének igazi problémák, a gyerekek érdeklődése is csökkenne. Felületes, főmális kapcsolatokat erősíthetünk csak így, ami semmiképpen sem fejlesztő hatású. Azt tartjuk célszerűnek, ha az első kivo-

násoktól kezdve a legkülönbözőbb számok előfordulnak (a 20-as számkörön belül) a felvetett problémákban. Az esetlegesen szükséges mechanikus rögzítést pedig a pótlások gyakorlásával végezzük el.

A számolási eljárások tanításának vonatkozásában, pedig nem értünk egyet azzal az elterjedt módszerrel, hogy megmutatunk a gyerekeknek és begyakoroltatunk velük egyféle gondolatmenetet, s ennek az egynek az alkalmazását követeljük meg. A gyerekek maguk alakítsák ki (mindegyik a magáét) a számukra legjobban megfelelő gondolatmenetet. Akinek pedig nem sikerül saját módszert alkotni, az társai változatos eljárásai közül nagyobb valószínűséggel kiválaszthatja az ő gondolkodásának leginkább megfelelőt, mintha csak a tanító által célszerűnek tartott gondolatmenetet ismeri meg.

Egyetlen területen célszerű kivételt tennünk. Írásbeli kivonásnál elvevéssel is, pótlással is elvégezhető a művelet. A kivonás értelmezésének az elvevés felelne meg, de számolástechnikailag a pótlás kényelmesebb. Ezért a gyakorlatban szinte mindenütt a pótlást használják-használjuk. Másrészt az írásbeli osztáshoz is a pótlásos módszer készesszinten történő alkalmazására van szükség. Ezért a pótlásos módszert valamennyi tanítványunkkal készesszintig kell gyakoroltatnunk, függetlenül a gyerek hajlamától, hajlandóságától.

Csak „szóbeli” kivonást tanítunk. Az írásbeli műveletek csak a későbbi igények miatt kerültek szóba. Első osztályban a kivonás még akkor sem „írásbeli”, ha a különbséget, az elvégzett műveletet írásban is rögzítjük. Matematikai jelekkel a már befejezett számolás menetét és eredményét írjuk le, azt sem mindig. Manuális tevékenységgel, az absztrahálást segítő eszközök használatával, az egyéni módszerek alkalmazása lehetőségének biztosításával (sőt bátorításával) sokféle analógia kiépítésével alapozható meg a jó számolási készség.

A tevékenységre alapozott hiányos összeadás és kivonás a gyakorlás, az ismeretek szilárdításának egyik eredményes eszköze. A hiányos összeadások és kivonások megoldása, megadott összegek és különbségek hiányzó tagjainak (egy-egy tag) kiszámítása az összeadás és kivonás kapcsolata tudatosításának folyamatában is az egyik jellemző tevékenységi forma. A műveletek közötti kapcsolatok feltárásának, tapasztalásának kettős haszna van. Egyrészt ez a tevékenység is mélyíti a gyerekek műveletfogalmát, másrészt a műveletek eredményének ellenőrzésére alkalmas módszerek közül az egyik leggyakrabban alkalmazott módszer, az inverz művelettel történő ellenőrzés megalapozásának elengedhetetlen feltétele e kapcsolatok ismerete.

Az ellenőrzéssel kapcsolatban szükségesnek tartjuk megjegyezni, hogy a fejlesztő jellegű matematikatanítás egyik ismérve az, hogy az igazság kritériuma a valósággal, a tapasztalattal történő összehasonlítás, és nem a tanító helyeslése vagy helytelenítése. Ez nyilván azt is jelenti, hogy a szavakban is megfogalmazott tulajdonság, kapcsolat mindig a tanulók saját tapasztalataira épül. Így remélhetőleg csökken annak veszélye, hogy a tanulók összetévesztik a külső jeleket a fogalmi tartalommal.

#### IRODALOM

- [1] *Balogh Viktória*: Műveletek, nyitott mondatok az alsó osztályokban. A Tanító, 1985. 11. szám. 15–18.
- [2] *Csapó Imréné*: Differenciált foglalkozások az első osztályos matematika tanítása során. Módszertani Közlemények, 1983. 5. szám. 305–318.
- [3] *C. Neményi Eszter*: Útmutató az általános iskolai matematika tananyagának korrekciójához 1–4. osztály. Első rész. Országos Pedagógiai Intézet, Budapest, 1986.
- [4] *C. Neményi Eszter*: Útmutató a matematika tananyag korrekciójához. Második rész. A Tanító, 1987. 8. szám. 18–27.
- [5] *Olajos Istvánné*: Matematikai alapfogalmak kialakításának előkészítése korrekciós osztályban. Módszertani Közlemények, 1986. 5. szám. 294–300.